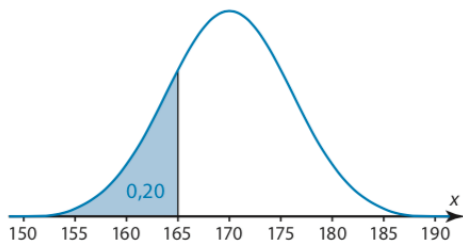
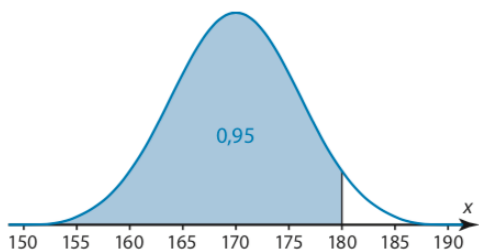


A1

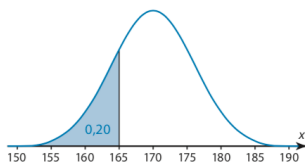
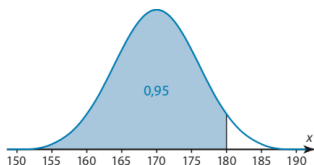
a) $P(X \leq 165) = 0,20$



b) $P(X \geq 180) = 1 - P(X < 180) = 1 - 0,95 = 0,05$



c) $P(165 \leq X \leq 180) = P(X \leq 180) - P(X \leq 165)$
 $= 0,95 - 0,20$
 $= 0,75$



Vastaus

a) 0,20 b) 0,05 c) 0,75

A2

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

- a) Kirjoitetaan sarakkeeseen A muuttujan luokat ja sarakkeeseen B frekvenssit. Lasketaan frekvenssien summa soluun B7.

Lasketaan soluun C2 aikaluokan 0–2 suhteellinen frekvenssi, ja kopioidaan kaavaa sarakkeessa C alaspäin. Ilmaistaan suhteelliset frekvenssit prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

C2		$\sum$	=	=B2/\$B\$7*100
	A	B	C	
1	Aika (h)	f	f %	
2	0-2	10	12,8	
3	3-5	24	30,8	
4	6-8	16	20,5	
5	9-11	13	16,7	
6	12-14	15	19,2	
7	Yhteensä	78	100	

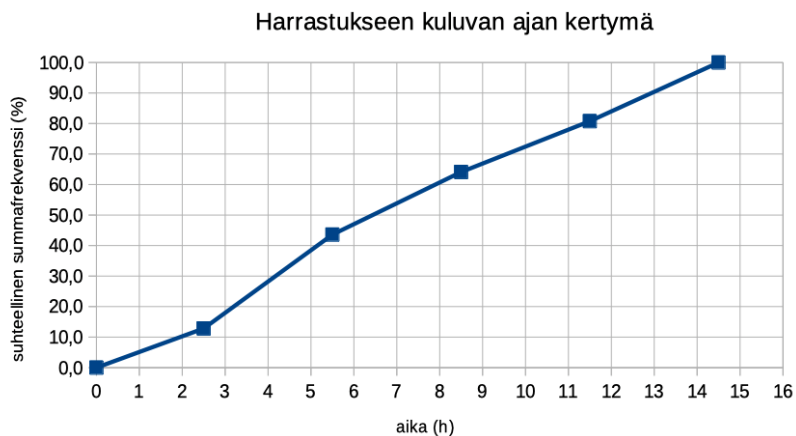
- b) Kirjoitetaan sarakkeisiin D ja E luokkien todelliset rajat.

Lisätään otsikkorivin alapuolelle tyhjä rivi. Kirjoitetaan sarakkeeseen F riville 2 ensimmäisen luokan alaraja ja seuraavien solujen arvoiksi kunkin luokan todellinen yläraja.

Kirjoitetaan sarakkeeseen G riville 2 arvoksi 0 ja lasketaan seuraavien solujen arvoiksi suhteelliset summafrekvenssit.

G3		$\sum$	=	G2+C3			
	A	B	C	D	E	F	G
1	Aika (h)	f	f %	Alaraja	Yläraja	Kuvaajassa käytettävä raja	Sf %
2						0	0,0
3	0-2	10	12,8	0	2,5	2,5	12,8
4	3-5	24	30,8	2,5	5,5	5,5	43,6
5	6-8	16	20,5	5,5	8,5	8,5	64,1
6	9-11	13	16,7	8,5	11,5	11,5	80,8
7	12-14	15	19,2	11,5	14,5	14,5	100,0
8	Yhteensä	78	100				

Piirretään kertymäkuvaaja. Muokataan akseleja niin, että pystyakseli on välillä 0–100.



Kuvaajan piirtäminen on ohjeistettu luvun 2 esimerkissä 2.

- c) Arvioidaan käytetyn ajan mediaani kertymäkuvaajasta. Kuvaaja ylittää 50 %:n rajan noin 6,5 tunnin kohdalla. Harrastukseen käytetyn ajan mediaani on 6,5 tuntia.
- d) Arvioidaan aika, jota vähemmän aikaa käytti 30 % jäsenistä. Kuvaaja ylittää 30 %:n rajan noin 4 tunnin kohdalla. Vähiten aikaa käyttäneet 30 % käytti aikaa enintään 4,0 tuntia.
- e) Arvioidaan aika, jota enemmän aikaa käytti 30 % jäsenistä. Kuvaaja ylittää 70 %:n rajan noin 9,5 tunnin kohdalla. Eniten aikaa käyttäneet 30 % käytti aikaa vähintään 9,5 tuntia.

Vastaus

c) 6,5 h d) 4,0 h e) 9,5 h

© Tekijät ja Sanoma Pro

A3

Autoilija saa työpäivän aikana pysäköintivirhemaksun todennäköisyydellä $9,3 \% = 0,093$.

Autoilija ei saa työpäivän aikana pysäköintivirhemaksun todennäköisyydellä $1 - 0,093 = 0,907$.

Kyseessä on toistokoe, jossa $n = 5$ ja $p = 0,093$.

a) Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{autoilija saa täsmälleen 2 pysäköintivirhemaksua}) \\ &= \binom{5}{2} \cdot 0,093^2 \cdot 0,907^3 \\ &\approx 0,065 = 6,5 \% \end{aligned}$$

b) Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{autoilija saa korkeintaan 2 pysäköintivirhemaksua}) \\ &= P(\text{saa 0 tai 1 tai 2 pysäköintivirhemaksua}) \\ &= \binom{5}{0} \cdot 0,093^0 \cdot 0,907^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,093^1 \cdot 0,907^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,093^2 \cdot 0,907^3 \\ &= 0,993 = 99,3 \% \end{aligned}$$

- c) Tapahtuman ”saa ainakin kolme pysäköintivirhemaksua” vastatapahtuma on ”saa korkeintaan kaksi pysäköintivirhemaksua”.

$$\begin{aligned} &P(\text{autoilija saa ainakin kolme pysäköintivirhemaksua}) \\ &= 1 - P(\text{autoilija saa korkeintaan kaksi pysäköintivirhemaksua}) \\ &= 1 - 0,993 \\ &= 0,007 = 0,7 \% \end{aligned}$$

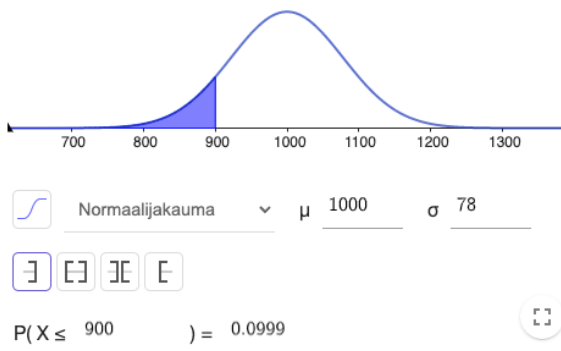
Vastaus

- a) 6,5 %
- b) 99,3 %
- c) 0,7 %

A4

Merkitään satunnaisesti valitun jauhopussin painoa kirjaimella X . Jauhopussien painon odotusarvo $\mu = 1000$ (g) ja keskihajonta $\sigma = 78,0$ (g).

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun jauhopussin paino on alle 900 g.

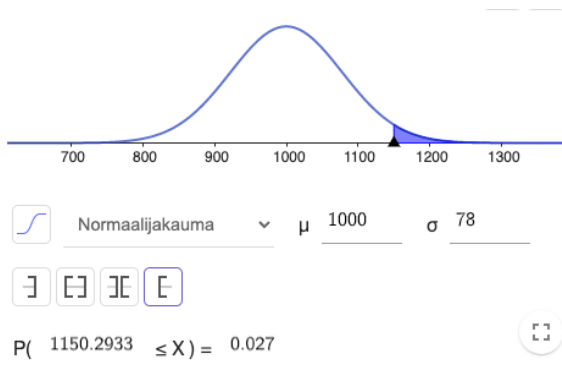


$$P(X < 900) \approx 0,0999$$

Jauhopussi painaa alle 900 g todennäköisyydellä 0,0999.

- b) On määritettävä raja, jonka yläpuolella on 2,70 % jauhopusseista, eli sellainen paino a , että $P(X > a) = 0,027$.

Määritetään raja GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



$$P(X > a) = 0,027, \text{ kun } a \approx 1150$$

Hylkäämisraja on 1150 g.

Vastaus

a) 0,0999

b) 1150 g

A5

a) Väite on tosi.

$$\text{Otoskeskiarvo on } \frac{246,0 + 253,0}{2} = 249,5 \text{ (g)}.$$

b) Väite on epätosi.

Keksipakkausten massojen keskiarvo on 95 %:n varmuudella välillä 246,0–253,0 g.

c) Väite on tosi.

Keksipakkausten massojen keskiarvo on 95 %:n varmuudella välillä 246,0–253 g mutta se voi olla myös välin ulkopuolella.

d) Väite on epätosi.

Virhemarginaali on puolet luottamusvälin pituudesta eli

$$\frac{253,0 - 246,0}{2} = 3,5 \text{ (g)}.$$

e) Väite on epätosi.

Kun luottamustason varmuus nousee 95 %:sta 99 %:iin, luottamusvälin pituus kasvaa.

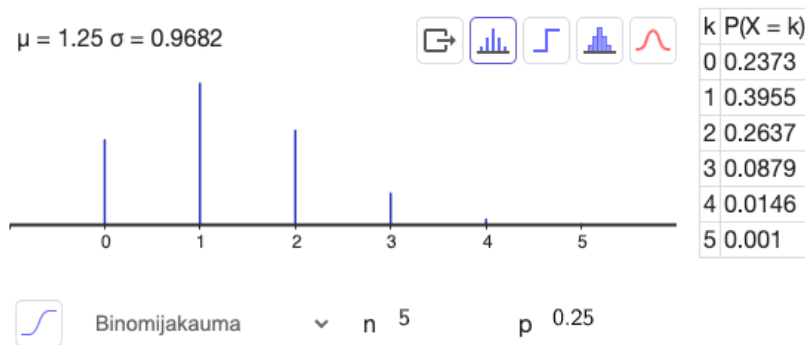
A6

Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä $n = 5$. Silmäluvun 1 todennäköisyys yksittäisessä heitossa on

$$p = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Silmälukujen 1 lukumäärä X noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(20; 0,25)$.

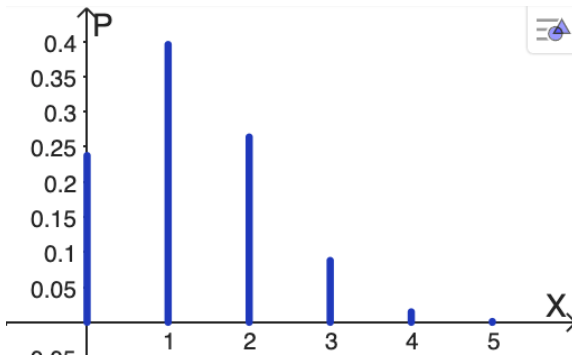
- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla satunnaismuuttujan jakauma.



Jakauma on siis:

<i>k</i>	<i>P(X = k)</i>
0	0,2373
1	0,3955
2	0,2637
3	0,0879
4	0,0146
5	0,0010

- b) Siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimetään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .



- c) Todennäköisin ykkösten lukumäärä on 1.
- d) Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = np = 5 \cdot 0,25 \approx 1,25$$

Ykkösten lukumäärän keskiarvo on 1,25.

Vastaus

c) 1

d) 1,25

A7

Puoluekantansa ilmoitti 1884 henkilöä.

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla kokoomuksen ja sosiaalidemokraattien kannatusprosenttien luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Kokoomuksen kannatusprosentti otoksessa on $24,2 \% = 0,242$.

Jakauma	Tilastot	×
Suhteen Z-estimaatti		
Luottamustaso 0.95		
Otos		
Onnistumiset 455.928		
N 1884		
Tulos		
Suhteen Z-estimaatti		
Onnistumiset	455.928	
N	1884	
S	0.0099	
Alaraja	0.2227	
Yläaraja	0.2613	
Väli	0.242 ± 0.0193	

Luottamusväli on [22,3 %; 26,1 %]. Kokoomuksen kannatus on 95 %:n varmuudella välillä 22,3 %–26,1 %.

Sosiaalidemokraattien kannatusprosentti otoksessa on $19,3\% = 0,193$.

Jakauma	Tilastot	X
---------	----------	---

Suhteen Z-estimaatti ▼

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 363.612

N 1884

[Tulos](#)

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset 363.612

N 1884

S 0.0091

Alaraja 0.1752

Yläaraja 0.2108

Väli 0.193 ± 0.0178

Luottamusväli on $[17,5\%; 21,1\%]$. Sosiaalidemokraattien kannatus on 95 %:n varmuudella välillä $17,5\% - 21,1\%$.

Luottamusvälit eivät ole lainkaan päällekkäin, joten voidaan päätellä 95 %:n varmuudella, että kokoomuksen kannatus oli kaikkien äänioikeutettujen keskuudessa suurempaa kuin sosiaalidemokraattien.

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla perussuomalaisten kannatusprosentin luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Perussuomalaisten kannatusprosentti otoksessa on $17,1 \% = 0,171$.

Jakauma	Tilastot	X
---------	----------	---

Suhteen Z-estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 322.164

N 1884

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	322.164
N	1884
S	0.0087
Alaraja	0.154
Yläraja	0.188
Väli	0.171 ± 0.017

Luottamusväli on [15,4 %; 18,8 %]. Perussuomalaisten kannatus on 95 %:n varmuudella välillä 15,4 %–18,8 %.

a-kohdan perusteella sosiaalidemokraattien kannatus on 95 %:n varmuudella välillä 17,5 %–21,1 %.

Luottamusvälit ovat osittain päällekkäiset, joten ei voida päätellä 95 %:n varmuudella, että sosiaalidemokraattien kannatus oli kaikkien äänioikeutettujen keskuudessa suurempaa kuin perussuomalaisten.

Vastaus

a) voidaan

b) ei voida

A8

Määritetään ensin otoksen työmatkojen ajan keskiarvo ja keskihajonta.

	A	B	C	D
1	Aika (m...			
2	47	keskiarvo	59.76	
3	52	keskihajonta	6.18	
4	55			
5	53			
6	54			

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla kaikkien työmatkojen aikojen keskiarvon luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Jakauma Tilastot X

Keskiarvon Z-estimaatti ▼

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 59.76

σ 6.18

N 45

Tulos

Keskiarvon Z-estimaatti

Keskiarvo	59.76
σ	6.18
S	0.9213
N	45
Alaraja	57.9544
Yläraja	61.5656
Väli	59.76 ± 1.8056

Luottamusväli on [58,0 min; 61,6 min]. Kaikkien työmatkojen keskiarvo on siis 95 %:n varmuudella välillä 58,0–61,6 min, joten ei voida sanoa 95 %:n varmuudella, että keskiarvo olisi muuttunut edellisen vuoden keskiarvosta 61 minuuttia.

Vastaus
ei voida

A9

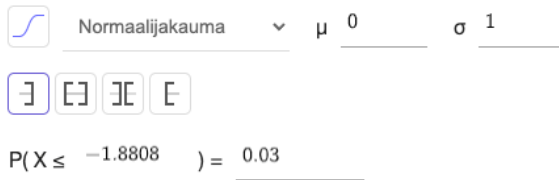
Tehtävänä on määrittää sokeripaketin massan X odotusarvo μ , kun keskihajonta $\sigma = 25$ (g). Verrataan satunnaismuuttujan X jakaumaa normitettuun normaalijakaumaan.

Olkoon arvoa $X = 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ vastaava normitettu arvo z .

Tulee olla $P(X \leq 1000) = P(Z \leq z) = 0,03$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim N(0, 1)$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla arvo z .



Normaalijakauma μ 0 σ 1

$P(X \leq -1.8808) = 0.03$

$P(Z \leq z) = 0,03$, kun $z \approx -1,8808$

Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan μ .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad z \approx -1,8808, \quad x = 1000, \quad \sigma = 25$$
$$-1,8808 = \frac{1000 - \mu}{25} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$\mu \approx 1047 \text{ (g)}$$

Odotusarvoksi pitäisi säätää 1047 g.

Vastaus

1047 g

A10

Otoskoko $n = 100$. Otoksen keskiarvo on 12,5 tuntia ja keskihajonta 1,3 tuntia.

a) Tapa 1.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla käyttöajan luottamusväli 99 %:n luottamustasolla.

Jakauma	Tilastot	
Keskiarvon Z-estimaatti ▼		
Luottamustaso	0.99	
Otos		
Keskiarvo	12.5	
σ	1.3	
N	100	

[Tulos](#)

Keskiarvon Z-estimaatti

Keskiarvo	12.5
σ	1.3
S	0.13
N	100
Alaraja	12.1651
Yläraja	12.8349
Väli	12.5 ± 0.3349

Luottamusväli on $[12,2 \text{ h}; 12,8 \text{ h}]$.

Tapa 2.

99 %:n luottamustasolla kriittinen arvo on 2,58.

Lasketaan virhemarginaali.

$$2,58 \cdot \frac{1,3}{\sqrt{100}} = 0,3354 \quad \text{kriittinen arvo} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Kaikkien akkujen käyttöaikojen keskiarvo on 99 %:n varmuudella vähintään

$$12,5 \text{ h} - 0,3354 \text{ h} = 12,1646 \text{ h} \approx 12,2 \text{ h}$$

ja enintään

$$12,5 \text{ h} + 0,3354 \text{ h} = 12,8354 \text{ h} \approx 12,8 \text{ h}.$$

Luottamusväli on [12,2 h; 12,8 h].

b) Luottamusvälin pituus on 0,5 h, kun virhemarginaali on

$$\frac{0,5 \text{ h}}{2} = 0,25 \text{ h}.$$

99 %:n luottamustasolla kriittinen arvo on 2,58.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan otoskoko n .

$$0,25 = 2,58 \cdot \frac{1,3}{\sqrt{n}} \quad \text{virhemarginaali} = \text{kriittinen arvo} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 180$$

Vastaus

a) [12,2 h; 12,8 h] b) 180 akkua